جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧
المادة : نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة : ١٠٠ درجة. المدة : ساعة ونصف. اسم الطالب:

السؤال الأول (٢٥ درجة):

أكتب العبارات التالية بشكل صحيح ودقيق:

(١) كل المجموعات الموجودة في جبر بوريل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ هي مجموعات غير منتهية وغير قيوسة حسب ليبيغ.

(٢) مجموعة كانتور C تحتوي الأعداد $\left\{0 , \frac{1}{3} , \frac{2}{3} , 1 , 2 , 3 , \ldots , 10\right\}$.

(٣) كل دالة قيوسة هي دالة مستمرة وكمولة ليبيغ.

(٤) الصف $\{\phi , X\}$ يولد $\sigma-$ الجبر $\{X\}$.

(٥) دالة ديريخليه تساوي 1 تقريباً في كل مكان على المجال $[0,1]$.

السؤال الثاني (٢٨ درجة):

لتكن $X = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

المطلوب : (١) اكتب (بدون إثبات): نصف حلقة و حلقة و جبر و $\sigma-$ حلقة و $\sigma-$ جبر على X.

(٢) بفرض $\mathcal{H}_1$ صف المجموعات وحيدة العنصر في X . ما هو $\sigma-$الجبر المولد بالصف $\mathcal{H}_1$.

(٣) اكتب ثلاث مجموعات بوريلية من $\mathbb{N}$.

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

إذا كان μ^* قياساً خارجياً على 2^X فإن صف المجموعات القيوسة $\mathfrak{M}_\mu$ يشكل $\sigma-$جبر على X، كما أن المقصور $\mu = \mu^*\big|_{\mathfrak{M}_\mu}$ يشكل قياساً على $\mathfrak{M}_\mu$. (حيث X مجموعة غير خالية).

السؤال الرابع (٢٢ درجة):

أثبت أن التوال التالية كمولة حسب ليبيغ على المجال $[0,15]$ ثم احسب تكاملاتها :

$$f(x) = x - 10 \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 \le x < 5 \\ 10 - x & ; \quad 5 \le x \le 15. \end{cases}$$

بين إن كانت الدالة $f(x) + g(x)$ كمولة حسب ليبيغ على المجال $[0,15]$، وفي حال الإيجاب أحسب تكاملها.

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في ٢٧ / ٨ / ٢٠١٧.

مدرس المادة : د. إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس/ ٣٢٢ / رياضيات ②
الدورة الإضافية ٢٠١٦ / ٢٠١٧

السؤال الأول (٢٥ درجة):

(١) يحوي جبر بوريل $B_{\mathbb{R}}$ مجموعات منتهية وغير منتهية لكن كلها قيوسة حسب ليبيغ.

(٢) تحوي مجموعة كانتور الأعداد $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ وأعداداً أخرى لكن جميعها تقع في المجال $[0,1]$.

(٣) كل دالة مستمرة هي دالة قيوسة.

(٤) الصف $\{X\}$ يولّد σ-الجبر $\{\Phi, X\}$.

(٥) دالة ديريخليه تساوي 0 تقريباً في كل مكان على $[0,1]$.

السؤال الثاني (٨ درجة):

(١) يمكن اعتبار $\{\Phi, \mathbb{N}\}$ مثالاً عن: نصف الحلقة - الحلقة - الجبر - σ-الحلقة و σ-الجبر
ولكن توجد أمثلة أخرى يمكن أن يكتبها الطالب.

(٢) σ-الجبر المولّد بـ $\mathcal{H}_1$ هو: $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_1) = 2^{\mathbb{N}}$ لأن المجموعة $\mathbb{N}$ معدودة.

(٣) مجموعات بوريلية من $\mathbb{N}$: $\{1\}$ و $\{1,2\}$ و $\mathbb{N}$ و ... ..

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

لإثبات أن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يشكل σ-جبر على X نثبت أنه σ-حلقة و $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

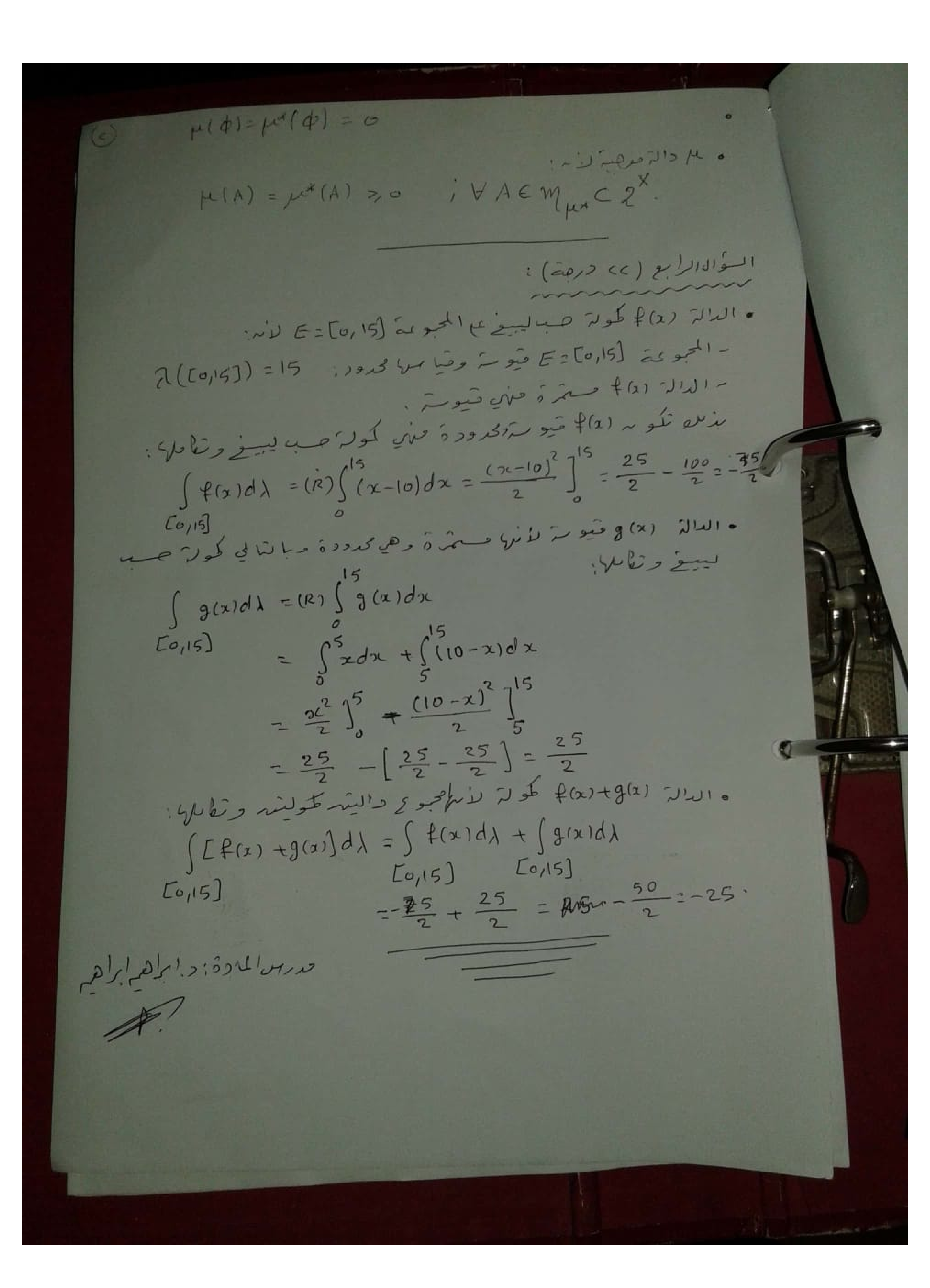
- بما أن X مجموعة قيوسة دوماً فإن $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.
- لتكن $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$، هذا يعني أن A و B مجموعات قيوسة. لذلك فإن $A \setminus B$ مجموعة قيوسة وبالتالي $A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.
- لتكن $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. هذا يعني أن كل A_i مجموعة قيوسة وبالتالي الاجتماع $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ مجموعة قيوسة $\Leftarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

بذلك يكون $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-حلقة وتحوي X $\Leftarrow$ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-جبر.

- لتكن $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى. عندئذ يكون

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

أي أن μ يحقق الخاصة σ-الجمعية.



(c) $\mu(\phi)=\mu^*(\phi)=0$

• μ دالة موجبة لأن:

$$\mu(A)=\mu^*(A)\geq 0 \quad ; \forall A\in \mathcal{M}_{\mu^*}\subset 2^X.$$

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

• الدالة $f(x)$ مكاملة حسب ليبيغ على المجموعة $E=[0,15]$ لأنه:

- المجموعة $E=[0,15]$ قيوسة وقياسها محدود: $\lambda([0,15])=15$
- الدالة $f(x)$ مستمرة فهي قيوسة.

بذلك تكون $f(x)$ قيوسة ومحدودة فهي مكاملة حسب ليبيغ وتكاملها:

$$\int_{[0,15]} f(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{15}(x-10)\,dx = \frac{(x-10)^2}{2}\Big]_0^{15} = \frac{25}{2}-\frac{100}{2} = -\frac{75}{2}$$

• الدالة $g(x)$ قيوسة لأنها مستمرة وهي محدودة وبالتالي مكاملة حسب ليبيغ وتكاملها:

$$\int_{[0,15]} g(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{15} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^5 x\,dx + \int_5^{15}(10-x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_0^5 - \frac{(10-x)^2}{2}\Big]_5^{15}$$

$$= \frac{25}{2} - \left[\frac{25}{2}-\frac{25}{2}\right] = \frac{25}{2}$$

• الدالة $f(x)+g(x)$ مكاملة لأنها مجموع دالتين مكاملتين وتكاملها:

$$\int_{[0,15]}[f(x)+g(x)]\,d\lambda = \int_{[0,15]} f(x)\,d\lambda + \int_{[0,15]} g(x)\,d\lambda$$

$$= -\frac{75}{2} + \frac{25}{2} = -\frac{50}{2} = -25.$$

مدرس المادة: د. ابراهيم ابراهيم